Université Internationale de Casablanca

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

Université Privée Autorisée par l'Etat UP2/11

Séries

A. Ramadane, Ph.D.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique et pour chaque $n \in \mathbb{N}$ soit $S_n = u_0 + \cdots + u_n$ la somme de $n+1$ premiers termes de cette suite. Alors on a

Définition 2.2. 1) La suite $(S_n)_n$ est appelée série de terme général u_n, cette série sera notée $\sum\limits_n u_n$ ou $\sum u_n$.

2) $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ est appelée la somme partielle d'ordre n de la série.

3) La série $\sum\limits_n u_n$ est dite convergente si la suite $(S_n)_n$ est convergente, dans ce cas $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$, est alors appelée somme de la série $\sum\limits_n u_n$, et désignée par $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ ou $u_0 + \cdots + u_n + \cdots$.

4) La série $\sum\limits_n u_n$ est dite divergente si elle n'est pas convergente.

Remarque 2.1. 1) On peut avoir une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ qui n'est définie qu'à partir d'un certain indice $n_0 \geq 1$. Dans ce cas la série $\sum_n u_n$ est la série de terme général u_n, où $u_n := 0$ pour $0 \leq n \leq n_0 - 1$.

2) Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite. Par abus de langage, et aussi suivant certains auteurs, on va se permettre d'utiliser la notation $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ pour désigner à la fois la série $\sum_n u_n$ et la somme $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$, si elle existe. Mais pour éviter toute confusion, les expressions : série $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ converge (ou diverge) ..., signifient qu'il s'agit d'une série, par contre les expressions : la somme $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ égale à un scalaire (ou à l'infinie) ..., signifient qu'il s'agit d'une somme.

Exemples 2.1. *1) Soit $r \in \mathbb{R}$, la* ***série géométrique*** *de raison r est la série $\sum_n r^n$, on a $\sum_n r^n$ converge si, et seulement si $-1 < r < 1$. En effet, si $r \in]-1, 1[$,*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1 - r}.$$

Pour $r = 1$, $S_n = n + 1$, donc $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \infty$.

Pour $r \geq 1$, $S_n \geq n + 1$, donc $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \infty$.

Pour $r = -1$, $\sum_k r^k$ diverge. En effet,

$$S_{2n} = \frac{1 - (-1)^{2n+1}}{1 - (-1)} = 1$$

et

$$S_{2n+1} = \frac{1 - (-1)^{2n+2}}{1 - (-1)} = 0.$$

Pour $r < -1$, $\sum_k r^k$ *diverge. En effet,*

$$S_{2n} = \frac{1 - r^{2n+1}}{1 - r} \ donc \ \lim_{n\to\infty} S_{2n} = \infty$$

et

$$S_{2n+1} = \frac{1 - r^{2n+2}}{1 - r} \ donc \ \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = -\infty.$$

2) La série

$$\sum_n \frac{1}{n(n+1)}$$

est convergente, car pour tout entier $n \geq 1$,

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Donc

$$\begin{aligned} S_n &= (1 - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}) + \cdots + (\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1}) \\ &= 1 - \tfrac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Définition 2.3. La somme de deux séries $\sum\limits_n u_n$ et $\sum\limits_n v_n$, notée $\sum\limits_n u_n \ + \ \sum\limits_n v_n$, est la série

$$\sum_n u_n + v_n.$$

Pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$, le produit de λ et la série $\sum\limits_n u_n$, notée $\lambda \cdot \sum\limits_n u_n$, est la série

$$\sum_n \lambda u_n.$$

Proposition 2.2. *Si $\sum\limits_n u_n$ et $\sum\limits_n v_n$ sont deux séries convergentes et si λ et β sont deux scalaires alors la série*

$$\lambda \cdot \sum_n u_n \ + \ \beta \cdot \sum_n v_n$$

est convergente et on a

$$\lambda \cdot \sum_{n=0}^{\infty} u_n \ + \ \beta \cdot \sum_{n=0}^{\infty} v_n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda u_n + \beta v_n.$$

Proposition 2.3. *Une série $\sum_n u_n$ est convergente si, et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy suivant :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ :\ \forall m > n \geq N,\ |\sum_{k=n+1}^{m} u_k| < \varepsilon.$$

Démonstration. Découle du critère de Cauchy pour la suite $(\sum_{k=0}^{n} u_k)_n$. $\square$

Proposition 2.4. ***Si une série*** $\sum_n u_n$ ***converge, alors*** $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} u_n &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} u_k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} u_k - \sum_{k=0}^{\infty} u_k = 0. \ \square\end{aligned}$$

Attention 2.1. La réciproque de la proposition **2**.4 n'est pas vraie en général. Voici deux exemples :

1) Soit la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

2) Un exemple remarquable est donné par la **série harmonique**

$$\sum_{n} \frac{1}{n}.$$

Le terme général de cette série est $1/n$ qui converge vers zéro. Mais on a

$$\begin{aligned} S_{2n} - S_n &= \tfrac{1}{n+1} + \tfrac{1}{n+2} + \cdots + \tfrac{1}{2n} \\ &\geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ termes}} \\ &= n \cdot \tfrac{1}{2n} = \tfrac{1}{2}, \end{aligned}$$

donc la série harmonique ne vérifie pas le critère de Cauchy donc elle est divergente.

3. Séries numériques à termes positifs.

Dans se paragraphe on s'intéresse aux séries à termes généraux positifs, c'est à dire les séries $\sum_n u_n$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

Proposition 2.5. *Une série $\sum_n u_n$ à termes positifs est convergente si, et seulement si elle est bornée.*

Démonstration. La suite $(\sum_{k=0}^{n} u_k)_n$ est croissante, donc elle converge si, et seulement si elle est bornée. $\square$

Proposition 2.6. *Soient $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries à termes positifs, supposons de plus que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$, alors :*

1) si la série $\sum_n v_n$ converge la série $\sum_n u_n$ converge et on a $\sum_{k=0}^{\infty} u_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} v_k$.

2) si la série $\sum_n u_n$ diverge la série $\sum_n v_n$ diverge.

Démonstration. Si $\sum_n v_n$ converge, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} v_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} v_k < \infty$. D'où $\sum_{k=0}^{\infty} u_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} v_k$. $\square$

Exemples 2.1. *Etudions la nature de la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

On a pour tout entier $n \geq 2$,

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{(n-1) \cdot n},$$

or $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}$ *est convergente, d'où* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *converge.*